

## АЛГЕБРА

### Показникові рівняння, які розв'язуються за допомогою зведення до однієї основи

*Розв'язок показникових рівняння виду  $a^x = b$ ,  $a^{f(x)} = b$*

1. Знайти ОДЗ;
2. Записати праву частину рівняння в вигляді степеня з основою  $a$ . Отримаємо  $a^x = a^c$  або  $a^{f(x)} = a^c$ ;
3. Розв'язати рівняння  $x = c$  або  $f(x) = c$ ;
4. Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.

**Задача 1.** Розв'язати рівняння  $2^{x^2-x} = 64$

Розв'язок

1. ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$
2.  $64 = 2^6$ , тому  $2^{x^2-x} = 2^6$
3.  $x^2 - x = 6$   
 $x^2 - x - 6 = 0$

За теоремою Вієта:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

4. Відповідь:  $x_1 = -2, x_2 = 3$

**Задача 2.** Розв'язати рівняння  $3^{\frac{x^2+2}{x}} = 27$

Розв'язок

1. Показник  $\frac{x^2+2}{x}$  має зміст, коли знаменник не дорівнює нулю, тобто  $x \neq 0$

ОДЗ:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2.  $3^3 = 27$ , тому  $3^{\frac{x^2+2}{x}} = 3^3$

3. Отримали дробово-раціональне рівняння:  $\frac{x^2+2}{x} = 3$

$\frac{x^2+2}{x} - 3 = 0$ . Зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+2-3x}{x} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

За теоремою Вієта:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

4. Корені належать ОДЗ.

Відповідь:  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

*Розв'язок показникових рівнянь способом зведенням до однієї основи*

1. Знайти ОДЗ;
2. Використовуючи властивості степеня, звести рівняння до виду, яке містить показниковий вираз тільки з однією основою;
3. Розв'язати отримане рівняння;
4. Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.

**Задача 3.** Розв'язати рівняння  $8 \cdot 10^{2x-7} = 2^{x+3} \cdot 5^x$

Розв'язок

1. ОДЗ:  $x \in R$
2.  $8 \cdot 10^{2x-7} = 2^x \cdot 2^3 \cdot 5^x$   
 $8 \cdot 10^{2x-7} = 2^x \cdot 8 \cdot 5^x$  поділимо на 8  
 $10^{2x-7} = 2^x \cdot 5^x$   
 $10^{2x-7} = 10^x$
3.  $2x - 7 = x$   
 $2x - x = 7$   
 $x = 7$
4. Відповідь:  $x = 7$ .

*Винесення спільного множника за дужки*

**Задача 4** .Розв'язати рівняння  $5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$

Розв'язок

1. ОДЗ:  $x \in R$

2.  $5^x - 2 \cdot \frac{5^x}{5^2} = 23$

Виносимо спільний множник за дужки:  $5^x \left(1 - \frac{2}{5^2}\right) = 23$

$5^x \cdot \frac{23}{25} = 23$

$5^x = 25$

3.  $5^x = 5^2$

$x = 2$

4. Відповідь:  $x = 2$

**Показникові рівняння, які розв'язуються за допомогою заміни**

*Розв'язок показникових рівнянь, які зводяться до квадратних, за допомогою заміни*

*(рівняння виду  $mt^2 + nt + k = 0$ )*

1. Зробити змінну  $a^x = t$ , де  $t > 0$ ;
2. Розв'язати рівняння  $mt^2 + nt + k = 0$ ;
3. Виконати обернену заміну змінної та знайти  $x$ .
4. Записати відповідь.

**Задача 5.** Розв'язати рівняння  $2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$

Розв'язок

1. Нехай  $2^x = t > 0$ ;

2.  $t^2 + 4t - 32 = 0$

За теоремою Вієта:  $\begin{cases} t_1 + t_2 = -4 \\ t_1 \cdot t_2 = -32 \end{cases} \begin{cases} t_1 = -8 < 0 \\ t_2 = 4 \end{cases}$

3. Повертаємось до заміни :

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

4. Відповідь:  $x = 2$ .

## Показникові рівняння, які розв'язуються за допомогою почленного ділення. Однорідні рівняння

*Розв'язок показникового рівняння виду  $ta^{2x} + na^x \cdot b^x + k \cdot b^{2x} = 0$*

1. Перетворити дане рівняння, виділив вирази  $a^x, b^x$ ;
2. Поділити всі доданки рівняння на  $b^{2x}$  (або на  $a^{2x}$ ).
3. Зробити заміну  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t > 0$ ;  $\left(\frac{b}{a}\right)^x = t > 0$
4. Розв'язати одержане квадратне рівняння відносно  $t$ ;
5. Виконати обернену заміну змінної та знайти  $x$ .
6. Записати відповідь, враховуючи ОДЗ.

**Задача 6.** Розв'язати рівняння  $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$

Розв'язок

1.  $9 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 0$

2. Поділимо всі доданки на  $3^{2x} > 0$

$$\frac{9 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{13 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + \frac{4 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$$

$$9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 = 0$$

2. Робимо заміну:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$

3. Одержали квадратне рівняння  $9t^2 - 13t + 4 = 0$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$

$$\left[ \begin{array}{l} t_1 = \frac{13+5}{2 \cdot 9} = 1 \\ t_2 = \frac{13-5}{2 \cdot 9} = \frac{4}{9} \end{array} \right.$$

4. Повертаємося до заміни:

5.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$  або  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \text{ або } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

6. Відповідь:  $x_1 = 0, x_2 = 2$

### Розв'язування показникових рівнянь за допомогою групування

1. Використовуючи властивості степеня перетворити рівняння так, щоб показники степеня були однаковими.
2. Згрупувати доданки з однаковими основами;
3. Звести рівняння до виду  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^c$ ;
4. Записати відповідь.

**Задача 7.** Розв'язати рівняння  $3^{x+2} + 2 \cdot 7^x = 7^{x+1} - 40 \cdot 3^x$

Розв'язок

1. Перетворюємо рівняння таким чином, щоб показники степеня були рівними:

$$3^x \cdot 3^2 + 2 \cdot 7^x = 7^x \cdot 7^1 - 40 \cdot 3^x$$

2. Згрупуємо доданки з однаковою основою:

$$3^x \cdot 9 + 40 \cdot 3^x = 7^x \cdot 7 - 2 \cdot 7^x$$

$$3^x (9 + 40) = 7^x (7 + 2)$$

$$3^x \cdot 49 = 7^x \cdot 9$$

3. Поділемо рівняння на  $7^x \cdot 49$ , отримали:  $\frac{3^x}{7^x} = \frac{9}{49}$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$x = 2$$

4. Відповідь:  $x = 2$ .

### Графічний метод

В одній системі координат будуємо графіки функцій  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ;

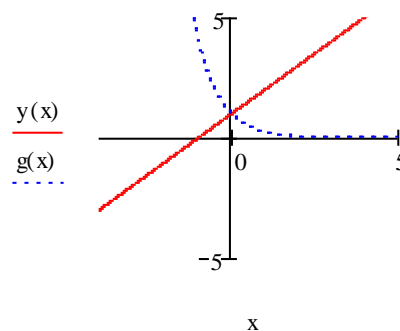
Використовуючи графік знаходимо координати точок перетину;

Записуємо відповідь.

**Задача 8.** Розв'язати рівняння графічно  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = x + 1$

Розв'язок

Побудуємо графіки функцій в одній системі координат  $y = x + 1$  та  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Графіки функцій перетинаються в точці, абсциса якої  $x = 0$

Відповідь:  $x = 0$

$2^1 = 2$				
$2^2 = 4$				
$2^3 = 8$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	
$2^4 = 16$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$a^0 = 1$
$2^5 = 32$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$2^6 = 64$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$2^7 = 128$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$5^5 = 3125$	
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				

### ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

1. Розв'язати рівняння

$$2^x = 64$$

А	Б	В	Г	Д
6	32	8	4	2

2. Розв'язати рівняння

$$2^{2x} = 2^9$$

А	Б	В	Г	Д
9	4,5	3	1	18

3. Розв'язати рівняння

$$2^{-x} = 2^4$$

А	Б	В	Г	Д
2	4	-4	8	1

4. Розв'язати рівняння

$$2^{x+1} = 2^5$$

А	Б	В	Г	Д
5	1	0	4	2

5. Розв'язати рівняння

$$3^{2x-1} = 81$$

А	Б	В	Г	Д
9	3	2	6	2,5

6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{5^2}$$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}$	2	3	0,5	0

7. Розв'язати рівняння

$$3^{2x-1} = 1$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
1	0,5	2	6	3

8. Розв'язати рівняння

$$2^x \cdot 5^x = \frac{1}{100}$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
2	5	-2	1	10

9. Розв'язати рівняння

$$2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{5x-5})$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
0,5	1	10	1,5	5

10. Розв'язати рівняння

$$2^x \cdot 2^2 - 2^x = 96$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
2	4	3	1	5

11. Розв'язати рівняння

$$7^x - 7^{x-1} = 6$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
1	2	3	0	6

12. Розв'язати рівняння

$$3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
2	1	-1	3	6

13. Розв'язати рівняння

$$4^x + 2^x = 72$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
2	-2	3	1	-1

14. Розв'язати рівняння

$$7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
0	$\log_7 5$	7	$0, \log_7 5$	5

15. Розв'язати рівняння

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
4	3	2	1	-4

16. Розв'язати рівняння

$$3 \cdot 4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
1	2	3	4	0

17. Розв'язати рівняння

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x = 0$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
2	0,1	5	1	-1

18. Розв'язати рівняння

$$3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$$

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
1	0	-1	2	3